Résolution de $-u'' + u = f$ sur le cercle

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
- 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.
- 220 : Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.
- 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
- 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Notons $H^1(T)$ l'ensemble des fonctions de $L^2((0,2\pi))$ $2\pi-$périodique de dérivée appartenant à $L^2((0,2\pi))$. Soit $f \in H^1(T)$, une fonction $u \in H^1(T)$ est solution faible de*

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad (*) \\ u(0) = u(2\pi) \end{cases}$$

(c'est-à-dire une fonction $u \in H^1(T)$ vérifie $\forall \phi \in H^1(T), \int_0^{2\pi} u'\phi' + u\phi = \int_0^{2\pi} f\phi$) si et seulement si u est de la forme $u = e \star f$ avec $\forall x \in [0,2\pi], e(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} + \frac{1}{e^{2\pi}-1}\mathrm{ch}(x)$

Preuve :

Étape 1 : Montrons que $u \in H^1(T)$ est solution faible de $(*)$ si et seulement si $u = K \star f$ où K est une fonction à déterminer.

Analyse :

Soit u une solution faible de $(*)$, On a

$$\forall \phi \in H^1(T), \int_0^{2\pi} u'\phi' + u\phi = \int_0^{2\pi} f\phi \text{ d'où } \int_0^{2\pi} u'\overline{\phi'} + u\overline{\phi} = \int_0^{2\pi} f\overline{\phi}$$

Comme les fonctions considérées sont dans $L^2((0,2\pi))$ d'après la formule de Parseval on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{c_n(u')}_{=inc_n(u)} \underbrace{\overline{c_n(\phi')}}_{=-in\overline{c_n(\phi)}} + c_n(u)\overline{c_n(\phi)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(\phi)}$$

car $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(u') = inc_n(u)$.
D'où $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[(1+n^2)c_n(u) - c_n(f)\right] \overline{c_n(\phi)} = 0.$

Comme l'égalité est vraie pour tout $\phi \in H^1(T)$, avec $\phi_n : x \mapsto e^{inx}$, on a $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(u) = \dfrac{c_n(f)}{1+n^2}$ d'où u est déterminée par $u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{c_n(f)}{1+n^2} e_n$ (limite L^2 de la suite des sommes partielles).

Synthèse :

La fonction $u : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{c_n(f)}{1+n^2} e^{inx}$ est bien définie car $\frac{|c_n(f)|}{1+n^2} \leq \frac{||f||_2}{1+n^2}$ et $f \in L^2((0,2\pi))$ d'où $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{|c_n(f)|}{1+n^2} < +\infty$ donc u est bien définie et est continue (comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues).
De plus,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|inc_n(f)|}{1+n^2} \leq \underbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{n}{1+n^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{:=C} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C||f||_2$$

donc u est de classe C^1 et $u \in H^1(T)$.

Ainsi, u est solution de $(*)$ si et seulement si u est de la forme $u = K \star f$ avec $K : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{e^{inx}}{1+n^2}$.

Étape 2 : Cherchons une expression explicite de K en résolvant l'équation au sens des distributions

Chercher les solutions faibles d'une équation différentielles revient à chercher les solutions au sens des distributions. Cherchons alors à résoudre l'équation $-T'' + T = T_f$ au sens des distributions.
Soit e une solution élémentaire, c'est-à-dire une solution au sens des distributions de l'équation $-T'' + T = \delta_0$.
Sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$, on a $-e'' + e = 0$ donc

$$\exists \alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, e(x) = \begin{cases} \alpha e^x + \beta e^{-x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^{+*} \\ \lambda e^x + \mu e^{-x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^{-*} \end{cases}$$

Or, d'après la formule des sauts, on a

$$\begin{aligned} e'' &= \{e''\} + (e(0^+) - e(0^-))\delta_0' + (e'(0^+) - e'(0^-))\delta_0 \\ &= -e + (\alpha + \beta - \lambda - \mu)\delta_0' + (\alpha - \beta - \lambda + \mu)\delta_0 \end{aligned}$$

d'où on doit avoir

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \lambda - \mu & = 0 \\ \alpha - \beta + \lambda + \mu & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha - \lambda & = -\frac{1}{2} \\ \beta - \mu & = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda & = \alpha + \frac{1}{2} \\ \beta & = \mu + \frac{1}{2} \end{cases}$$

donc $e(x) = \begin{cases} \alpha e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \\ \alpha e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$ d'où $e(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} + \alpha e^x + \mu e^{-x}$.
Par changement de variable, on peut ré-écrire $e(x)$ sous la forme $e(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} + a\cosh(x) + b\sinh(x)$.
Ainsi e est une fonction continue (et non plus seulement une distribution).
Comme e est une solution élémentaire, on a $\forall f \in \mathcal{C}^0((0,2\pi)), e \star f$ est solution de $-T'' + T = T_f$ au sens des distributions donc est solution faible de l'équation $-u'' + u = f$.

Étape 3 : Conclusion

Montrons que $e \star f \in H^1(T)$,

— $e \star f$ est 2π-périodique car f l'est.

— $||e \star f||_2 \leq ||e||_1||f||_2 < +\infty$ car $e \in \mathcal{C}^0((0, 2\pi))$.

— $||(e \star f)'||_2 = ||e \star f'||_2 =\leq ||e||_1||f'||_2 < +\infty$ car $f \in H^1(T)$.

donc $e \star f \in H^1(T)$, d'après ce qui précède, $c_n(e \star f) = c_n(K \star f)$ et par injectivité des coefficients de Fourier, on a $e \star f = K \star f$.

Comme l'égalité est vrai pour tout $f \in H^1(T)$, on a $e = K$ (il suffit de tester l'égalité sur des fonctions tests)

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} + a\cosh(x) = K(x)$ donc e est une fonction paire (car K l'est), donc $b = 0$ d'où $e(x)$ est de la forme $\frac{1}{2}e^{-|x|} + a\cosh(x)$.

De plus, comme $e(0) = e(2\pi)$, on a $\frac{1}{2} + a = \frac{1}{2}e^{-2\pi} + a\cosh(2\pi)$ d'où $a = \dfrac{\frac{1}{2}e^{-2\pi} - \frac{1}{2}}{\cosh(2\pi) - 1} = \dfrac{1}{e^{2\pi} - 1}$. $\square$